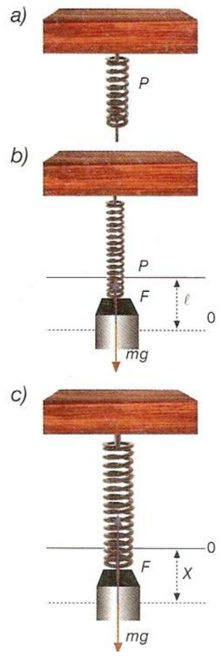
8.2. Una masa colgada de un resorte vertical



Un muelle de constante elástica *k* está suspendido de un extremo, como se indica en la Figura. Inicialmente el muelle no está deformado (a).

Colgamos una masa *m* del extremo libre y se deja descender suavemente hasta que el sistema alcanza el equilibrio (b). En estas condiciones el muelle se ha estirado una longitud *l* y ejerce una fuerza recuperadora hacia arriba $F = k\, l$, de acuerdo con la ley de Hooke. En el equilibrio se cumple $m\, g = k\, l$

De la expresión $k = m\, \omega^2$, y teniendo en cuenta que $\omega = 2\, \pi\, f$: $k = m\, 4\, \pi^2\, f^2$, que al despejar f:

$$f = \frac{1}{2\,\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Para muelles rígidos (donde *k* tiene un valor grande) o para masas pequeñas, la frecuencia de oscilación es grande (las oscilaciones son rápidas). Sin embargo, para muelles blandos (*k* pequeña) o para masas grandes, las oscilaciones son lentas.

EJEMPLO 1

De un resorte se ha colgado una masa de 5,0 kg y se produce un alargamiento de 18 cm. Más tarde, el sistema se estira 7,5 cm y se suelta.

Calcula:

a) La constante elástica del muelle

b) La amplitud del movimiento.

c) El periodo del movimiento.

Solución:

a) Si llamamos Δy al alargamiento del muelle producido por el peso de la masa que se ha colgado, y teniendo en cuenta que el sistema se encuentra en equilibrio, se cumple que $m\, g = k\, \Delta y$:

$$k = \frac{m\, g}{\Delta y} = \frac{5{,}0 \cdot 9{,}8}{0{,}18} = 270\ \mathrm{N/m}$$

b) Como la masa se libera partiendo del reposo en y = -7,5 cm, oscilará entre ± 7,5 cm. Es decir, que este valor será la amplitud.

c) El periodo es:

$$T = \frac{1}{f} = 2\,\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\,\pi\sqrt{\frac{5{,}0}{270}} = 0{,}86\ \mathrm{s}$$

EJEMPLO 2

Una masa de 1,0 kg cuelga de un resorte cuya constante elástica es k = 100 N/m y puede oscilar libremente sin rozamiento. Desplazamos la masa 10,0 cm de su posición de equilibrio y la soltamos para que empiece a oscilar.

Calcula:

a) La ecuación del movimiento de la masa.

b) El periodo de oscilación.

c) La velocidad y la aceleración máximas.

d) La fuerza recuperadora cuando la masa se encuentra 5,0 cm por encima de la posición de equilibrio.

Solución:

Como la vibración tiene lugar en el eje vertical, representaremos la elongación con la letra *y.*

a) La ecuación general será y = A sen (ω t + ϕ).

De acuerdo con el enunciado, para t = 0, la masa se encuentra en el extremo inferior, y = - A; luego la fase inicial es:

$$-A = A\,sen\,\varphi \;\; \rightarrow \;\; \varphi = -\frac{\pi}{2}\ \mathrm{rad}$$

La frecuencia angular se obtiene despejando ω de la expresión $k = m\,\omega^2$:

$$\omega = \sqrt{\frac{\mathrm{k}}{\mathrm{m}}} = \sqrt{\frac{100}{1{,}0}} = 10\ \mathrm{rad/s}$$

Por tanto, la ecuación del movimiento será: $y = 0{,}1\,sen\,\left(10\,t - \frac{\pi}{2}\right)$

b) El periodo viene dado por: $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{10} = 0{,}63\ \mathrm{s}$

c) Valores máximos: $v_{máx} = A\,\omega = 0{,}1 \cdot 10 = 1$ m/s (en y = 0); $a_{máx} = A\,\omega^2 = 0{,}1 \cdot 10^2 = 10$ m/s^2 (en y = A)

d) Cuando se encuentra por encima de la posición de equilibrio la elongación es positiva y = 0,05 m. La fuerza recuperadora será: *F* = - *k y* = -100 · 0,05 = -5 N