Se lanza verticalmente hacia arriba desde la superficie de la tierra un cuerpo de 1000 kg con una velocidad de 8000 m/s.
a) ¿Qué altura alcanza si se toma como radio de la Tierra 6400 km?
b) ¿Qué energía posee el cuerpo a esa altura? (g_o = 9,8 m/s^2)

Solución

a) Cuando alcance la máxima altura, se detendrá, es decir v = 0, y por tanto su E_c = 0. Igualando las energías mecánicas en el momento del lanzamiento y en el momento en que se detiene:

$$\frac{1}{2}\,m\,v^2 - G\frac{M_T m}{R_T} = 0 - G\frac{M_T m}{R_T + h}$$

$$\frac{v^2}{2} = GM_T\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_T + h}\right) = \frac{GM_T R_T^2}{R_T^2}\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_T + h}\right)$$

$$\frac{v^2}{2} = g_O R_T^2\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_T + h}\right)$$

$$\frac{v^2}{2g_O R_T^2} = \frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_T + h}$$

$$\frac{1}{R_T + h} = \frac{1}{R_T} - \frac{v^2}{2g_O R_T^2} = \frac{2g_O R_T - v^2}{2g_O R_T^2}$$

$$R_T + h = \frac{2g_O R_T^2}{2g_O R_T - v^2}$$

$$h = \frac{2g_O\,R_T^2}{2g_O R_T - v^2} - R_T$$

Y sustituyendo los datos:

$$h = \frac{2\cdot 9{,}8\cdot(6{,}4\times 10^6)^2}{2\cdot 9.8\cdot 6{,}4\times 10^6 - (8\times 10^3)^2} - 6{,}4\times 10^6 = 6{,}666\times 10^6\ \mathrm{m}$$

b) La E_m se conserva, ya que el peso es una fuerza conservativa; por tanto, la E_m en el momento del lanzamiento será la misma que cuando alcance la máxima altura:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}1000(8000)^2 = 3{,}2\times 10^{10}\ \mathrm{J}$$

$$E_p = -\frac{GM_T m}{R_T} = -\frac{GM_T m R_T}{R_T^2} = -g_O m R_T = -9{,}8\cdot 1000\cdot 6{,}4\times 10^6 = -6{,}272\times 10^{10}\ \mathrm{J}$$

$$E_M = E_c + E_p = 3{,}2\times 10^{10} - 6{,}272\times 10^{10} = -3{,}07\times 10^{10}\ \mathrm{J}$$

Se hubiera llegado al mismo resultado sustituyendo la altura calculada en el apartado (a) en la ecuación de la energía potencial.

Se lanza una nave de masa m = 5000 kg desde la superficie de un planeta de radio R = 6000 km y masa M_1= 4×10^{24} kg, con velocidad inicial v_o = 2×10^4 m/s, en dirección hacia otro planeta del mismo radio $R_2 = R_1$ y masa $M_2 = 2\ M_1$, siguiendo la línea recta que une los centros de ambos planetas. Si la distancia entre dichos centros es D = 4,83×10^{10} m, determinar:
a) La posición del punto P en el que la fuerza neta sobre la nave es cero.
b) La energía cinética con la que llegará la nave a la superficie del segundo planeta.
DATO: G = 6,67×10^{-11} U.I.

Solución:

a) Se igualan la fuerza de atracción gravitatoria que ejerce cada planeta sobre la nave, aplicando la Ley de Gravitación Universal de Newton:

$$G\frac{M_1\,m}{X^2} = G\frac{M_2\,m}{(D-X)^2}$$

siendo X la distancia desde el punto P hasta el planeta 1. Simplificando:

$$\frac{M_1}{X^2} = \frac{M_2}{(D-X)^2}$$

Teniendo en cuenta la relación de masas:

$$\frac{M_1}{X^2} = \frac{2\,M_1}{(D-X)^2}$$

Se vuelve a simplificar:

$$\frac{1}{X^2} = \frac{2}{(D-X)^2}$$

$$\sqrt{2}\,X = D - X$$

$$X = \frac{D}{1+\sqrt{2}} = \frac{4{,}83\times 10^{10}}{1+\sqrt{2}} = 2\times 10^{10}\ \mathrm{m}$$

b) Como las únicas fuerzas que se ejercen sobre la nave son las debidas a la atracción gravitatoria de los dos planetas, se conserva la energía mecánica: la energía total del cuerpo en la superficie del planeta 1, E_1 debe ser igual a la energía total del cuerpo en la superficie del planeta 2, E_2.
E_1 es la suma de la energía cinética más la energía potencial gravitatoria por interacción con el planeta 1 más la energía potencial gravitatoria por interacción con el planeta 2 y en el segundo planeta, exactamente igual. Ahora bien, en el término de energía potencial gravitatoria planeta 2 cuando el cuerpo está en el primero y viceversa, su denominador es D – 2R, sale cuatro órdenes de magnitud menor, y se puede despreciar: $E_1 = E_2$

$$\frac{1}{2}mv_o^2 - G\frac{M_1\,m}{R_1} = E_C - G\frac{M_2\,m}{R_2}$$

Y teniendo en cuenta que $R_1 = R_2 = R$ y $M_2 = 2\ M_1$ operando y sustituyendo:

$$\frac{1}{2}mv_o^2 - G\frac{M_1\,m}{R} = E_C - G\frac{2M_1\,m}{R}$$

$$E_C = \frac{1}{2}mv_o^2 - G\frac{M_1\,m}{R} + G\frac{2M_1\,m}{R} = \frac{1}{2}mv_o^2 + G\frac{M_1\,m}{R}$$

$$E_C = \frac{1}{2}\,5000\,(2\times 10^4)^2 + 6{,}67\times 10^{-11}\frac{(4\times 10^{24})5000}{6\times 10^6} = 1{,}222\times 10^{12}\ \mathrm{J}$$

Calcular:

a) La densidad media del planeta Mercurio, sabiendo que posee un radio de 2440 km y una intensidad de campo gravitatorio en su superficie de 3,7 N/kg.

b) La energía necesaria para enviar una nave espacial de 5000 kg de masa desde la superficie del planeta a una órbita en la que el valor de la intensidad de campo gravitatorio sea la cuarta parte.

DATO: G =6,67×10^{-11} U.I.

Solución:

a) Sabemos que $\rho = \frac{M}{V}$ y que $V = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi {R_O}^3}$

de la ecuación $g_O = G\frac{M}{{R_O}^2}$ despejamos M: $M = \frac{g_O\ {R_O}^2}{G}$.

A continuación sustituimos las expresiones de M y V en la ecuación de la densidad:

$$\rho = \frac{\frac{g_O\ {R_O}^2}{G}}{\frac{M}{\frac{4}{3}\pi {R_O}^3}} = \frac{3\ g_O}{4\pi R_O G} = \frac{3 \cdot 3{,}7}{4\ \pi\ 2{,}440\times10^6 \cdot 6{,}67\times10^{-11}} = 5430\ \text{kg/m}^3 = 5{,}43\ \text{g/cm}^3$$

b) De $g_O = G\frac{M}{{R_O}^2}$ y $g = \frac{g_O}{4} = G\frac{M}{R^2}$ al dividir miembro a miembro, calculamos la relación de los radios:

$$\frac{g_O}{g} = \frac{G\frac{M}{{R_O}^2}}{G\frac{M}{R^2}} = \frac{g_O}{\frac{g_O}{4}} = 4\text{, de donde } 4 = \frac{R^2}{{R_O}^2} \text{ y por tanto} \qquad \boxed{R = 2\ R_O}$$

La energía necesaria para poner en órbita la nave espacial vendrá determinada por la diferencia de energía mecánica entre la órbita y la superficie del planeta:

$$\Delta E_M = -\frac{GMm}{2R} + \frac{GMm}{2R_O} = -\frac{GMm}{4R_O} + \frac{GMm}{2R_O} = \frac{GMm}{4R_O}$$

A continuación, multiplicamos por R_O el numerador y el denominador para poder sustituir $G\frac{M}{{R_O}^2}$ por g_O:

$$\Delta E_M = \frac{GMmR_O}{4{R_O}^2} = \frac{g_O m R_O}{4} = \frac{3{,}7 \cdot 5000 \cdot 2{,}440\times10^6}{4} = 1{,}1285\times10^{10}\ \text{J}$$